

[een valsø vøørgevøl]

Matthijs Westera



Pythagoras leefde ongeveer van 580 tot 500 voor Christus. Hij was degene die voor het eerst opperde dat gedachten in het brein plaatsvonden en niet in het hart. Hij was degene die overtuigd vegetariër was en in het geloei van een koe de reïncarnatie van zijn beste vriend herkende. Hij was de man die een wijnbeker ontwierp welke gulzigheid bestrafte met een doorweekt kruis. Maar boven alles was hij de filosoof die meende dat getallen de basis vormden van al het zijnde en dat de muziek van zijn tijd niet om aan te horen was.

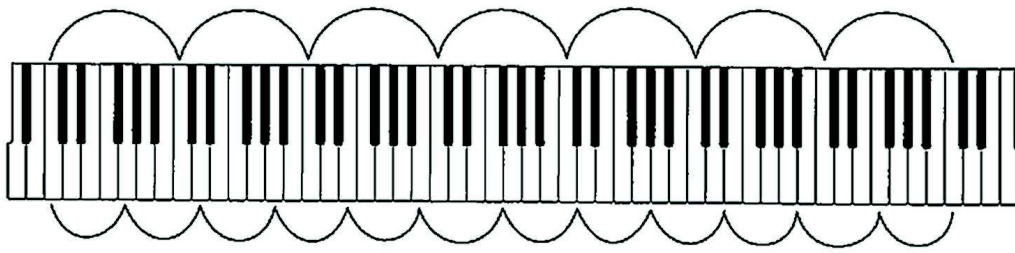
Pythagoras, zelf muzikant, kon een aardig toontje spelen op een populair viersnarig instrument, de τετραχορδος (τετρα=vier, χορδος=toon). Het idee van dit instrument was dat je een grote variatie aan tonen kon produceren door, net als bij de moderne gitaar, op bepaalde afstanden op de snaren te drukken en ze vervolgens aan te slaan. Als je een snaar korter maakte werd de toon hoger. Pythagoras merkte op dat bepaalde tonen heel mooi samengingen, maar andere tonen totaal niet. In een poging de muziek van zijn tijd drastisch te verbeteren bracht hij de mooie samenklanken, of 'consonanties', in kaart. Zodoende ontdekte hij grote wetmatigheden in de manier waarop

de toonhoogte van de snaarlengte afhangt. Door de ontdekking van deze getallen in de muziek kwam Pythagoras op het idee om de getallen en de wiskunde als elementaire basis van het zijnde te beschouwen¹.

Hij ontdekte dat een verhouding van 2:1 in de lengte van twee snaren overeenkomt met een octaaf verschil in toonhoogte tussen de twee snaren. De twee geproduceerde tonen klinken dan extreem mooi samen – bijna even mooi als twee identieke tonen, unisono, verhouding 1:1. Enkele mooie verhoudingen die beslist een lampje zullen doen branden bij de gemiddelde musicus zijn 6:5 (de kleine terts), 5:4 (de grote terts), 4:3 (de kwart), 3:2 (de kwint) en, reeds genoemd, 2:1 (de octaaf) en 1:1 (unisono). Bekijk bijvoorbeeld de Wiki "List of meantone intervals" voor alle intervallen die in (Westerse!) muziek gebruikt worden.

De komma van Pythagoras

In Westerse muziek wordt een interval van zeven octaven gelijkgesteld aan een interval van twaalf kwinten. Bekijk het pianoklavier bovenaan de volgende pagina:



De grote bogen geven de octaven aan (van de lage C naar de hoge C), en de kleine bogen geven kwinten aan (C, G, D, A, E, B, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, F, C). Maar komt deze verdeling wel overeen met de verhoudingen die Pythagoras ontdekte? Eens rekenen:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} / 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.0136432647705078125$$

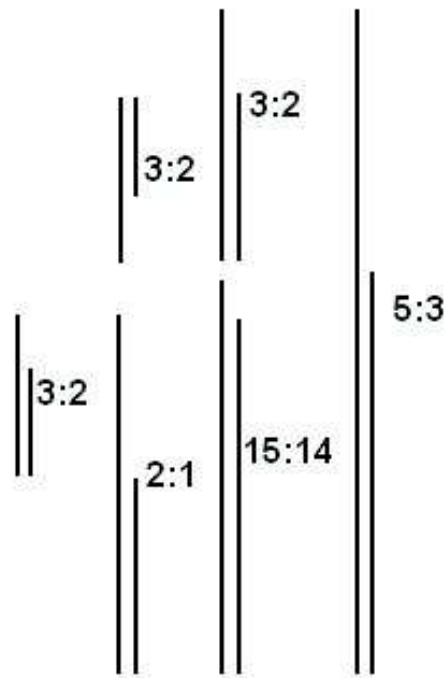
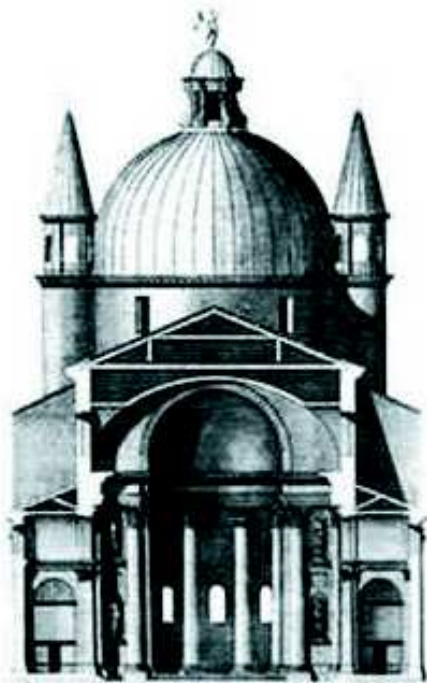
We zien dat een interval van twaalf kwinten zo'n anderhalf procent groter is dan een interval van zeven octaven! Dit lijkt niet zo veel, maar het levert een hoorbare valsheid op. Stel je voor dat we een piano stemmen uitgaande van de kwintenladder. De hoge C zou dan, wanneer je deze 7 octaven verlaagt (ofwel de snaar 2^7 keer zo lang maakt), 23.46 cent ² hoger klinken dan de C waaraan deze identiek zou moeten zijn. Het verschil tussen twee naastgelegen toetsen op de piano is (afhankelijk van de stemming, zo zal blijken) 100 cent, dus je kunt je voorstellen dat een verschil van 23.46 cent, een kwart van een halve toon, duidelijk hoorbaar is – een valse pauperpiano is het gevolg. Dit verschil van 23.46 cent wordt de komma van Pythagoras genoemd.

Hoe moeten we een piano dan stemmen om valse samenklanken

als gevolg van de komma van Pythagoras te voorkomen? In de Westerse wereld hebben we daar de gelijkzwevende stemming voor bedacht. Het octaaf wordt exact gestemd op de verhouding 1:2, zoals Pythagoras dat het mooiste vond. Elk octaaf wordt vervolgens verdeeld in

twaalf exact gelijke intervallen: de halve tonen. Een halve toon komt dan overeen met 1 twaalfdemachtswortel uit 2 (ofwel 100 cent). We zagen eerder al dat kwinten en octaven niet goed samen gaan. Een kwint komt in de gelijkzwevende stemming dan ook niet overeen met de verhouding 3:2 (702 cent), zoals het hoort, maar ongeveer met de verhouding 2,997:2 (700 cent) – een tikkeltje vals dus. Helaas, het kan niet anders.

Als je een beetje muzikaal aangelegd bent zul je weten dat er bij valse samenklanken zwevingen ontstaan – relatief langzame trillingen die het gevolg zijn van een klein verschil in frequentie tussen twee tonen. 'Gelijkzwevende stemming' is dan ook niets anders dan een stemming waarbij tussen elke twee opeenvolgende tonen evenveel zweving, of valsheid, is. De piano wordt op die manier eigenlijk



alsnog een valse pauperpiano, maar hij is overal ongeveer even vals en bovendien maar een heel klein beetje, zodat het niet opvalt!

Architectuur

And now for something completely different, zo lijkt het. In de Renaissance was alles gericht op de 'ware schoonheid', het liefst gelijk aan het Goddelijke. God heeft de mens naar Haar evenbeeld geschapen, dus moesten de verhoudingen van het menselijk lichaam bestudeerd worden om de ware schoonheid te leren kennen. De menselijke verhoudingen werden daarom uitvoerig in kaart gebracht (denk aan de "Vetruviusman" van Leonardo da Vinci) en veelvuldig toegepast in de kunst en de architectuur. We weten allemaal dat de verwachtingen die je hebt, je meetresultaten onbewust kunnen beïnvloeden. Vandaar dat op mysterieuze wijze overal in het menselijk lichaam verhoudingen van 1:2, 2:3, 3:4, etcetera, werden gevonden - perfecte octaven, kwinten en kwarten. Die verhoudingen werden zodoende, om

ware schoonheid te bereiken, in de bouwkunst toegepast³. Kunnen we dergelijke gebouwen misschien, via de verhoudingen die gebruikt zijn, omzetten in een muziekstuk?

Laten we het eens met bovenstaand gebouw proberen. Hoe klinkt deze voorgevel? We verdelen de gevel eerst in een onderstuk en een dak. Dat onderste gedeelte bestaat dan weer uit een voorgevel en een soort achterhuis, terwijl het dak is opgebouwd uit twee zijtorentjes en middentorentje. Zo delen we steeds de delen weer op in kleinere delen. Ik heb dit (een beetje uit de losse pols) gedaan zoals weergegeven in het strepenpatroon, te lezen van rechts naar links. Om het niet overbodig ingewikkeld te maken ben ik na vier opdelingen gestopt, maar je kunt natuurlijk veel verder gaan. Bovendien zijn er veel verschillende opdelingen mogelijk – maar dat terzijde, ik moest er nu eenmaal eentje kiezen.

Stel nu dat we beginnen op de C. De eerste opdeling van de gevel



brengt ons, via een sext (5:3), van de C naar de A. Vanaf die A gaan we via een kwint (3:2) naar de E, terwijl we tegelijkertijd vanaf de grondtoon, C, een half toontje omhoog gaan (15:14) naar de Cis. Vervolgens gaan we vanaf de E via een kwint omhoog naar de B terwijl we vanaf de Cis een octaaf (2:1) omhoog gaan. We eindigen met het ophogen van de Cis naar de Gis, via een kwint (3:2). In notenschrift de vier analysestappen van de gevel:



Dit klinkt misschien een tikkeltje raar (probeer zelf maar), maar toch kun je op deze manier uit menig renaissancistisch gebouw een leuk thema destilleren voor een muziekstuk. Kijk daarom gewoon eens omhoog als je in een oud gebouw staat, probeer de muziek te doorgronden die klonk in het hoofd van de architect en dank Pythagoras voor zijn muzikale inzicht. De saaie kerkbezoeken, die standaard verbonden zijn aan elk bezoek aan een vreemde stad, zullen een stuk mooier zijn nu je dit weet! Bovendien kun je flauwe grappen maken tegen de architect – mocht die nog leven – omdat jij nu weet dat de komma van Pythagoras in feite zorgt voor een valse voorgevel.

¹ Het verhaal wil dat hij ook geïnspireerd werd door de klanken van verschillende hamers in de smidse op de hoek. Sommige hamers klonken heel mooi samen wanneer hij er simultaan mee op het aambeeld of zijn vinger mepte, andere hamers klonken vreselijk lelijk.

² De cent is een logaritmische eenheid voor het meten van muzikale intervallen. Een perfecte octaaf (2:1) is vastgesteld op 1200 cent. Een perfecte kwint (3:2) komt dan overeen met $1200 \log_2(3/2) = 702$ cent. De twee Cs op het pianoklavier zouden via perfecte octaven $7 \cdot 1200 = 8400$ cent verschillen, en via de kwintenladder ongeveer met $12 \cdot 702 = 8424$ cent. Het exacte verschil is de komma van Pythagoras.

³ Misschien denk je hierbij meteen aan de bekende verhouding van 1:1,618..., ofwel de gulden snede, ofwel de asymptotische waarde van de verhouding tussen twee opeenvolgende getallen in een Fibonaccireeks. Deze verhouding werd echter pas na de Renaissance populair en valt bij de overige verhoudingen een beetje uit de toon (haha). Het is een valse octaaf plus een terts – niet echt mooi dus.